

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –****08.02.2026****CLASA a XI- a**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

Subiectul I (20 puncte)

- a) Se consideră $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$. Arătați că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
- b) Dacă $X \in M_n(\mathbb{R})$ și $\det X > 0$, arătați că $\det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0$.

Subiectul II (20 puncte)

Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3 = A^2$ și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Subiectul III (25 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_1 = \sqrt{2005}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2005}{2006}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Arătați că $1 \leq a_n \leq 2005$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir monoton.
- c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$.

Subiectul IV (25 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n$.